Apuntes

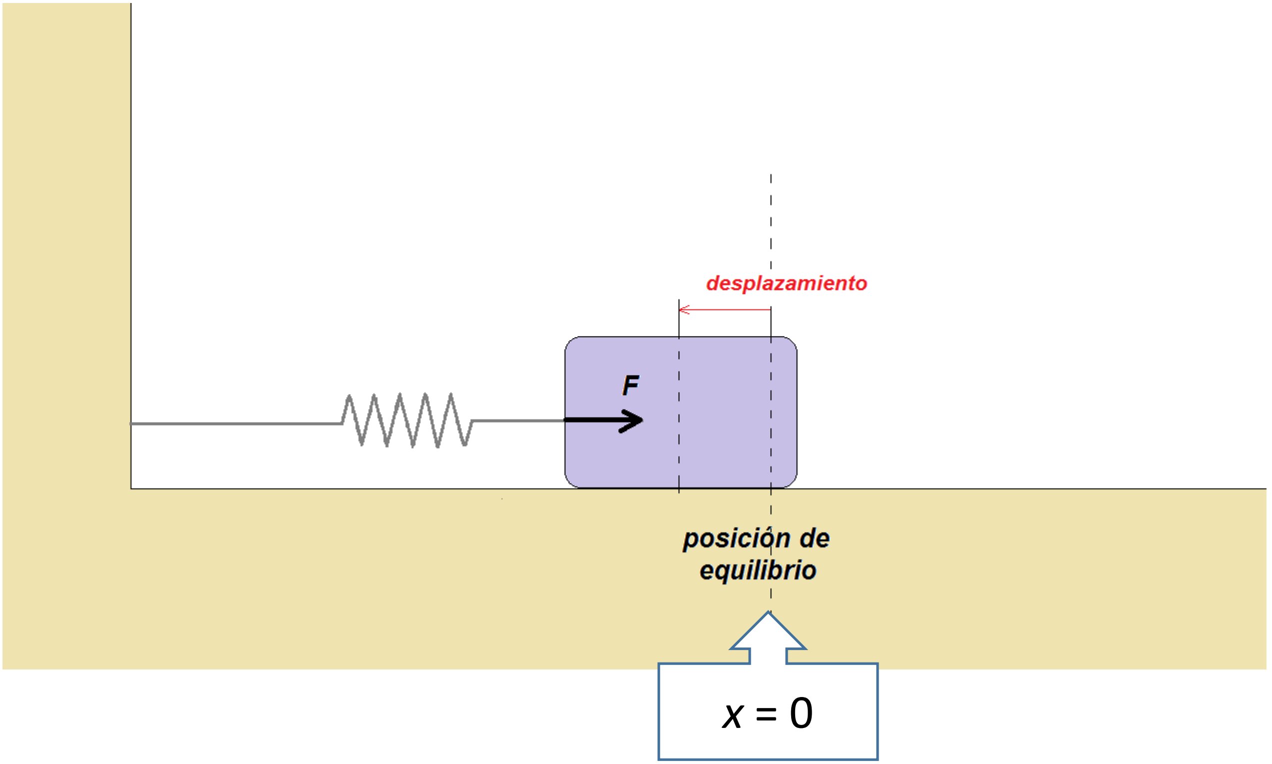
Movimiento Oscilatorio

OSCILACIONES

Movimiento periódico: El objeto en movimiento regresa regularmente a la misma posición cada intervalos fijos de tiempo. Ejemplos: cuerpo unido a un resorte, péndulo, ondas mecánicas (en cuerdas, en la superficie del agua), vibraciones moleculares, …

Dentro de los movimientos periódicos, el que presenta mayor interés es el movimiento armónico simple (MAS), del que veremos dos ejemplos en esta unidad: el movimiento de un cuerpo unido a un resorte, y el movimiento de un péndulo

Movimiento de un cuerpo unido a un resorte



El movimiento es periódico:

El cuerpo va desde la posición de equilibrio ($x = 0$)…,

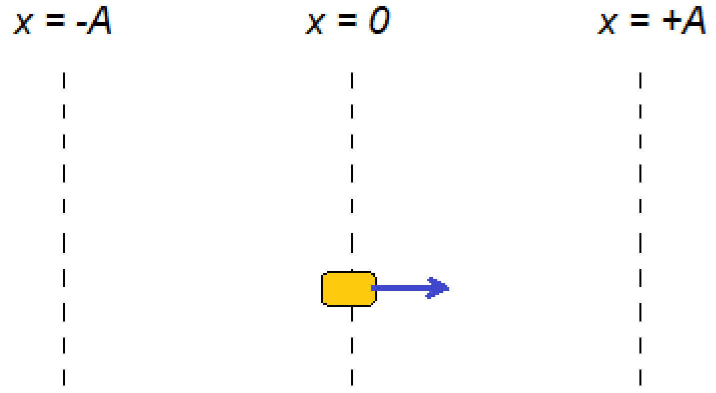
…hasta su máximo desplazamiento positivo ($x = +A$),…

…invierte su movimiento pasando nuevamente por $x = 0$…,

…hasta su máximo desplazamiento negativo ($x = -A$),…

…y vuelve a pasar por la posición de equilibrio ($x = 0$)…,

…y este movimiento se repite indefinidamente



Al movimiento básico anterior, que ocurre entre que el cuerpo está en cierta posición con cierta velocidad en un dado instante t hasta que el cuerpo vuelve a la misma posición con igual velocidad en un instante $t + \tau$ se lo llama oscilación.

Al tiempo τ que dura una oscilación se lo denomina período

La cantidad A es la amplitud de la oscilación

Pregunta: ¿Qué distancia recorrerá un resorte en MAS de amplitud A en un ciclo completo?

Respuesta: $4A$

Movimiento de un cuerpo unido a un resorte – Descripción matemática

Sabemos que la fuerza del resorte está dada por la Ley de Hooke: $F = -kx$

Y si esta es la única fuerza interviniente a lo largo del eje horizontal x: $ma_x = -kx$

Usando la definición de aceleración: $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$

Dividendo ambos lados por la masa: $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$

Y llamando $\frac{k}{m} = \omega^2$: $\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x}$

La anterior es una ecuación diferencial de segundo grado. Lo que debemos buscar es una función $x(t)$ tal que, al ser derivada dos veces, sea igual a la función original multiplicada por $-\omega^2$

La solución a la ecuación anterior tiene la forma: $\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \phi)}$

ϕ es la fase inicial (se mide en rad)

A es la amplitud del movimiento

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ es la frecuencia angular o pulsación. Se mide en rad/s

Movimiento de un cuerpo unido a un resorte – Descripción matemática

Ejercicio 1: Verificar que la función $x(t) = A\,cos(\omega t + \phi)$ es solución de la ecuación diferencial $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$

Respuesta. Si la función $x(t)$ es solución de la ecuación, cuando reemplacemos en la misma se debe cumplir la igualdad. Veamos...

$$x(t) = A\,cos(\omega t + \phi)$$

$$\frac{dx}{dt} = -A\,\omega\,sen(\omega t + \phi)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\,\omega^2\,cos(\omega t + \phi)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\,cos(\omega t + \phi)$$

$$-\omega^2 x = -\omega^2 A\,cos(\omega t + \phi)$$

Podemos verificar, entonces, que si $x(t) = A\,cos(\omega t + \phi)$, entonces $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$

Movimiento de un cuerpo unido a un resorte – Descripción matemática

Ahora que ya sabemos que la ecuación del MAS para un oscilador masa-resorte está dada por:

$$x(t) = A\, cos(\omega t + \phi),$$

analicemos el significado de los diferentes parámetros:

- A es la amplitud del movimiento. Para el sistema masa-resorte es el desplazamiento máximo de la masa desde su posición de equilibrio, y se mide en m.

- ω es la frecuencia angular, e indica la velocidad con que ocurre la oscilación. Se mide en rad/s. Para el caso particular del sistema masa-resorte:

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

ω está relacionada con la frecuencia f (número de oscilaciones por segundo):

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

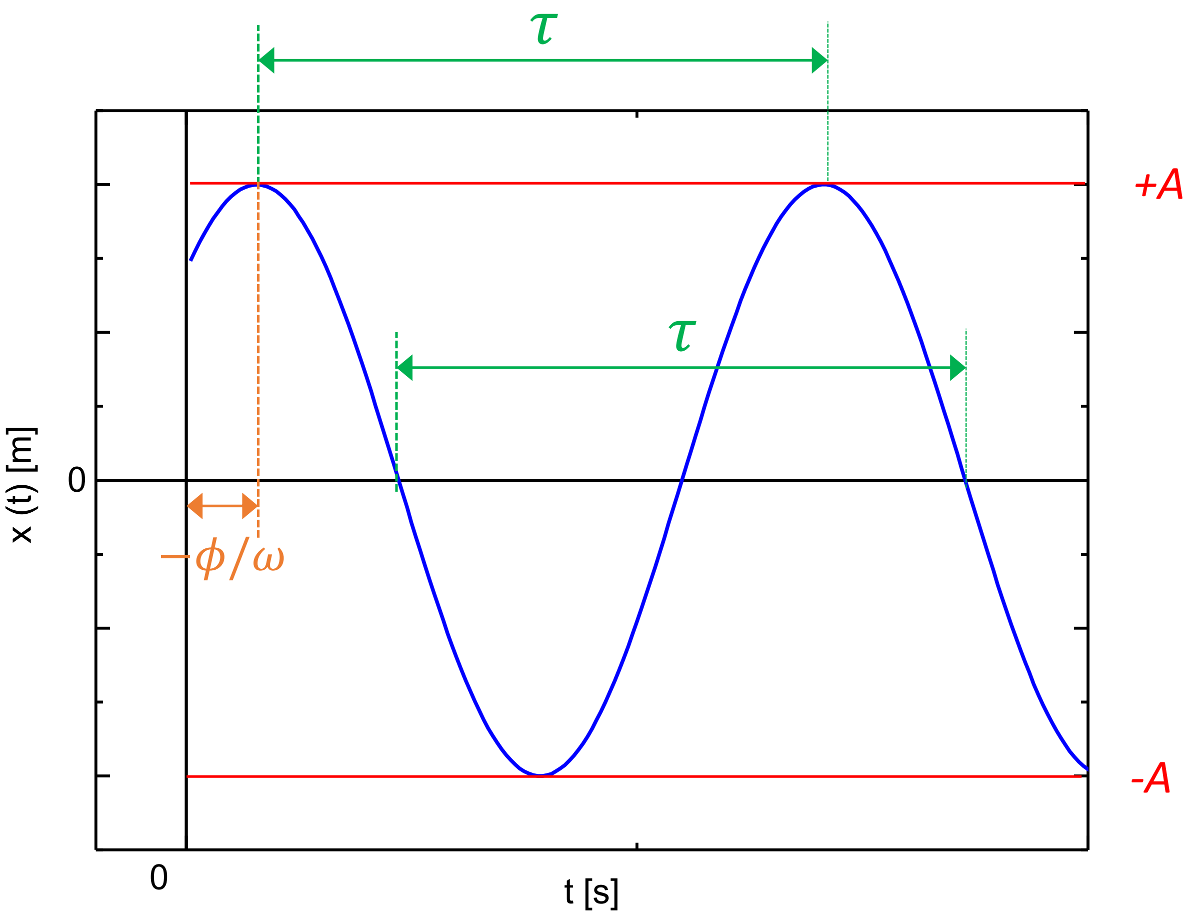
ω está relacionada con el período τ (tiempo que tarda cada oscilación):

$$\tau = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

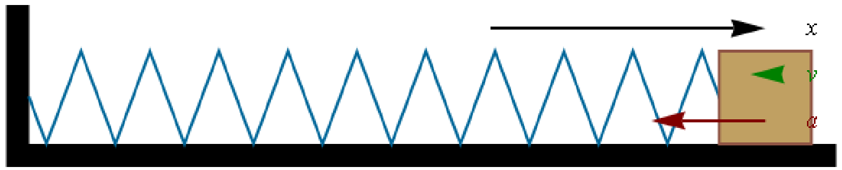
- ϕ es el ángulo de fase inicial del movimiento, y se mide en rad. Está determinado por las condiciones iniciales del problema (por ejemplo, por la posición inicial de la masa)

Movimiento de un cuerpo unido a un resorte – Descripción matemática

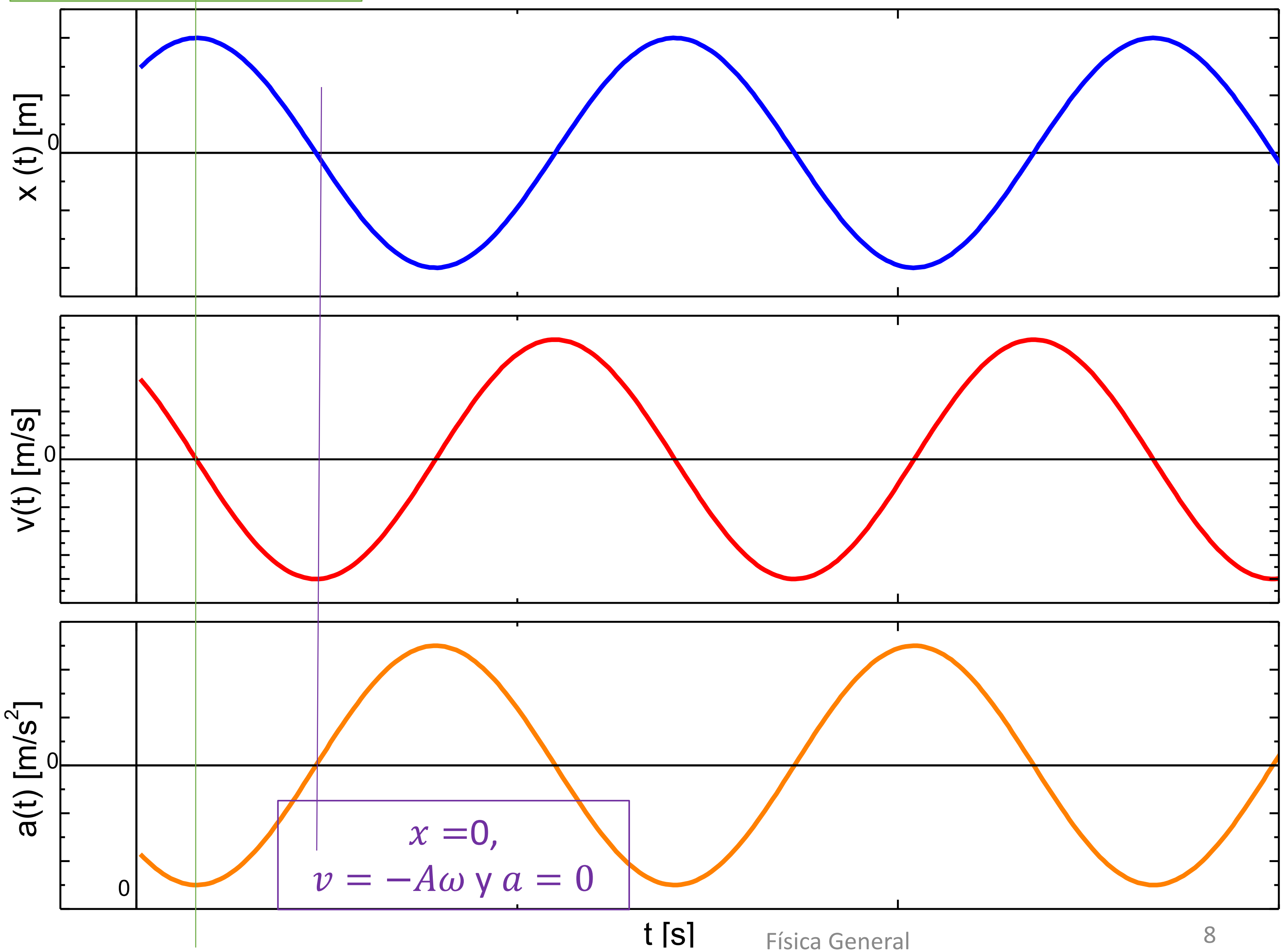
¿Cómo es la representación gráfica de $x(t) = A\,cos(\omega t + \phi)$? ¿Qué representa cada parámetro (A, ω, ϕ)?



Movimiento de un cuerpo unido a un resorte – Descripción matemática



$x = +A,$
$v = 0$ y $a = -A\omega^2$



¿Cómo varían la velocidad y la aceleración?

$$x(t) = A\,cos(\omega t + \phi)$$

Note que $x_{max} = A$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega\, sen(\omega t + \phi)$$

Note que $v_{max} = A\omega$

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\, cos(\omega t + \phi)$$

Note que $a_{max} = A\omega^2$

Movimiento de un cuerpo unido a un resorte – Ejemplos

Ejemplo 1. Un cuerpo de masa m oscila horizontalmente sin rozamiento sujeto a un resorte de constante elástica $k = 5000\ N/m$. Si el período de oscilación es de 0.4 s, ¿Cuál es la masa del cuerpo?

Respuesta. Sabemos que $\omega = \sqrt{k/m}$ y que el periodo está relacionado con la frecuencia angular mediante $\tau = 2\pi/\omega$

$$\longrightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{2\pi}{0.4\ s} = 15.71\ rad/s \quad \longrightarrow \quad \sqrt{\frac{k}{m}} = 15.71\ rad/s$$

$$\longrightarrow \quad m = \frac{5000\ N/m}{(15.71\ rad/s)^2} = 20.26\ \frac{N\ s^2}{m} = 20.26\ kg$$

Movimiento de un cuerpo unido a un resorte – Energía Mecánica

En un sistema masa-resorte que se mueve por una superficie horizontal sin fricción, se esperaría que la energía mecánica se mantenga constante (recuerde que $\Delta E_M = W_{fzas.no\ cons.} + W_{ext}$, y para un sistema asilado en el que todas las fuerzas son conservativas como este, $\Delta E_M = 0$)

Se puede llegar a este resultado de la conservación de la energía a partir de las expresiones analíticas para el MAS: Recordando que:

$$x(t) = A\,cos(\omega t + \phi)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega\,sen(\omega t + \phi)$$

$$E_M = E_k + E_{P,el} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m[-A\omega\,sen(\omega t + \phi)]^2 + \frac{1}{2}k[A\,cos(\omega t + \phi)]^2$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 sen^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}kA^2 cos^2(\omega t + \phi)$$

Y, reemplazando con $\omega^2 = k/m$ en el primer término:

$$E_M = E_k + E_{P,el} = \frac{1}{2}kA^2 sen^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}kA^2 cos^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2}kA^2[sen^2(\omega t + \phi) + cos^2(\omega t + \phi)]$$

$$\rightarrow \boxed{E_M = \frac{1}{2}kA^2 = cte.}$$

Note que aunque la energía cinética E_k y la potencial elástica $E_{P,el}$ varían con el tiempo, la suma de ambas es una constante

¿Qué sucede si existe rozamiento?

Movimiento de un cuerpo unido a un resorte – Energía Mecánica

De lo desarrollado anteriormente…

$$E_k(t) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2sen^2(\omega t + \phi)$$

$$E_{P,el}(t) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2cos^2(\omega t + \phi)$$

$$E_M = E_k + E_{P,el} = \frac{1}{2}kA^2$$

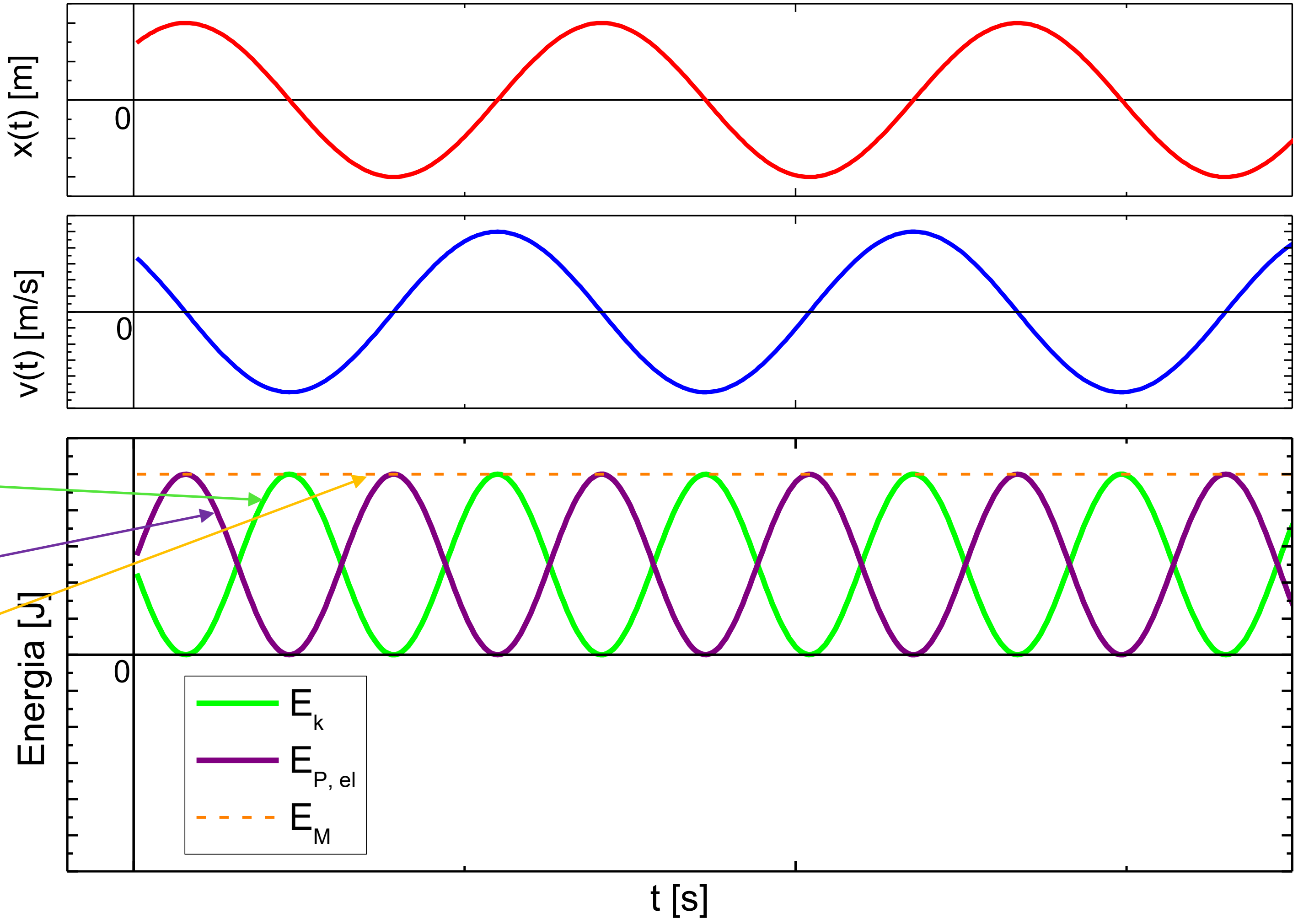


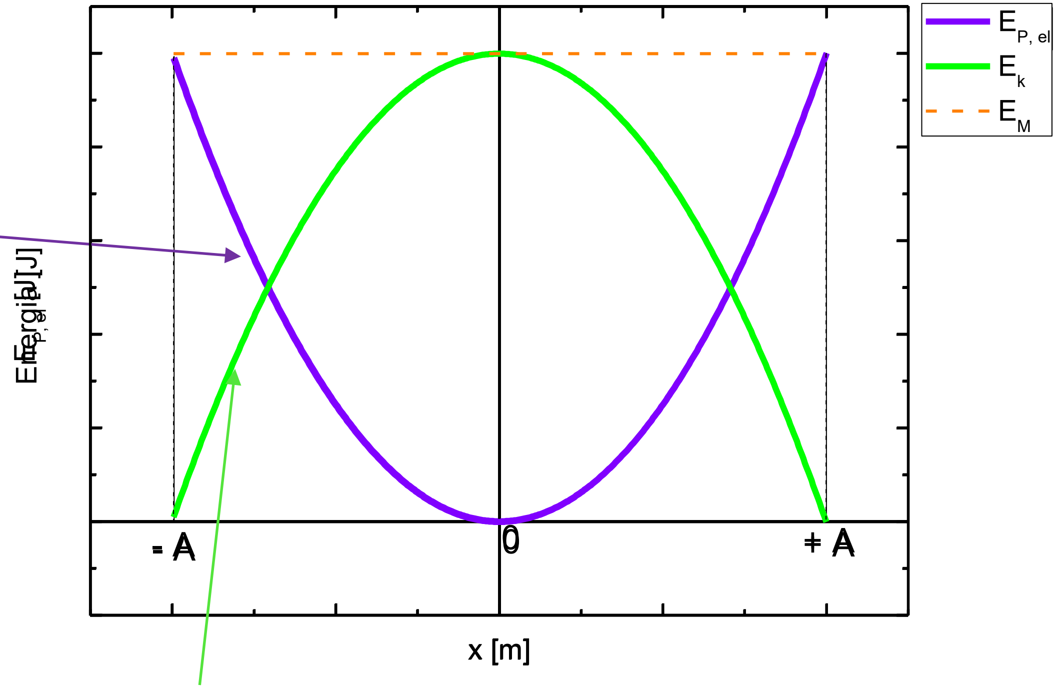
Gráfico que muestra cómo varían los términos energéticos en función del tiempo

Movimiento de un cuerpo unido a un resorte – Energía Mecánica

Intentemos ahora graficar los términos de energía en función de la posición…

$$E_{P,el}(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

Parábola con coeficiente principal positivo (ramas hacia arriba)



$$E_k(x) = ??$$

$$E_k(x) = E_M - E_{P,el}(x) = \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

Parábola con coeficiente principal negativo (ramas hacia abajo)

$$\boxed{E_k(x) = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2)}$$

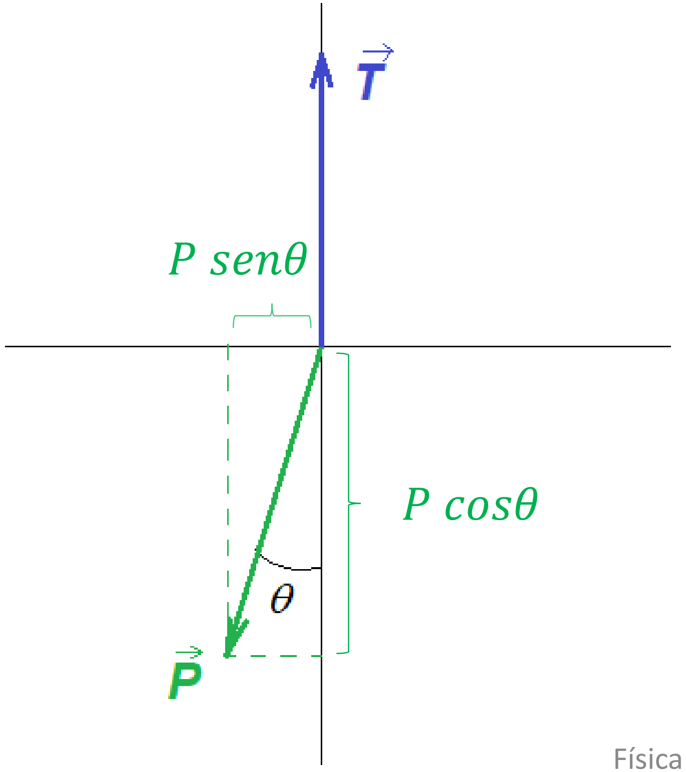
El péndulo simple

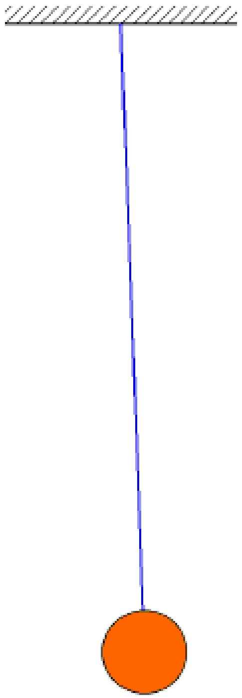
Es otro sistema que muestra movimiento periódico

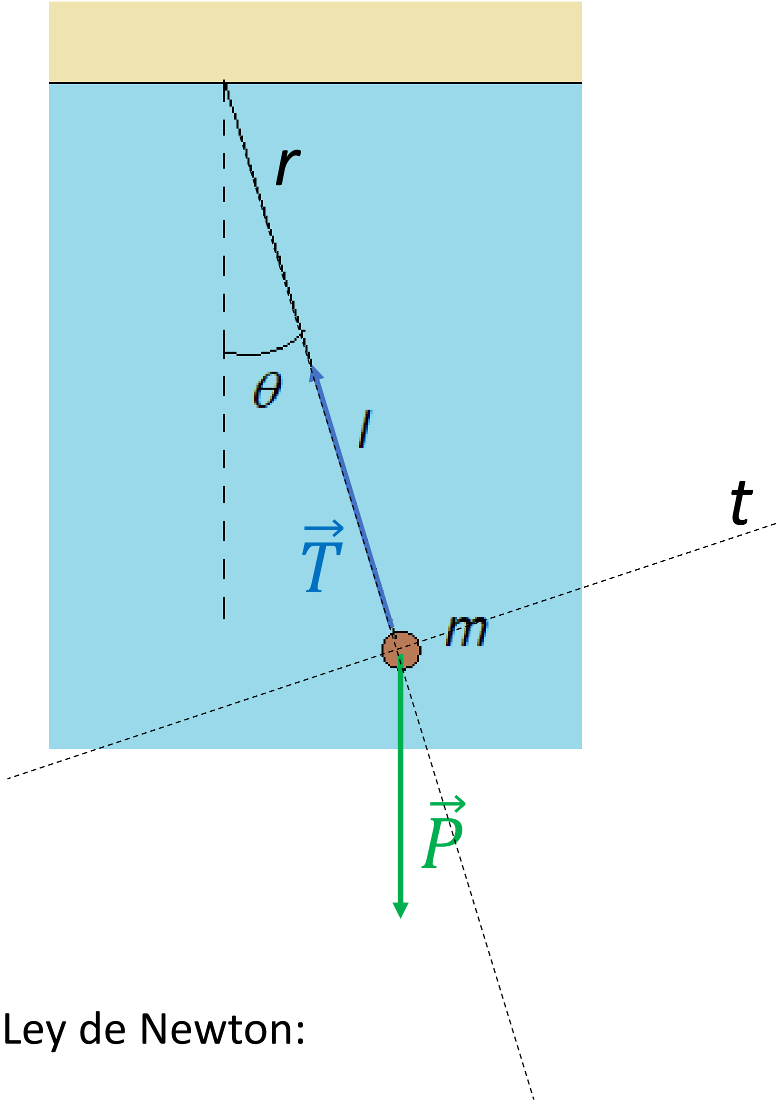
Analicemos el movimiento de un pequeño cuerpo de masa m suspendido de una cuerda inextensible de longitud l

¿Cuáles son las fuerzas sobre el cuerpo?

Diagrama de cuerpo libre:





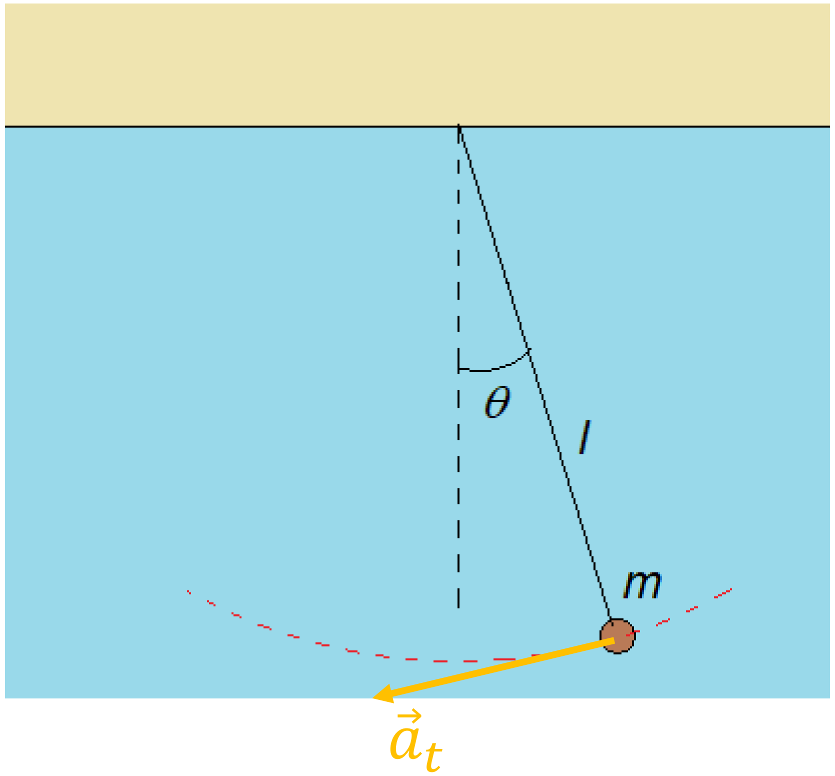


Planteamos 2da Ley de Newton:

$$\sum F_r = T - mg\ cos\theta = ma_c$$ → Aceleración centrípeta responsable de la trayectoria circular

$$\sum F_t = -mg\ sen\theta = ma_t$$ → Aceleración tangencial al círculo

El péndulo simple



$$-mg\ sen\theta = ma_t$$

Cuando estudiamos movimiento circular vimos que $a_t = \alpha R$ (R es el radio del círculo)

En este caso $R = l$ (el largo de la cuerda)

$$-mg\ sen\theta = m\alpha l$$

Por definición, $\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$

$$-\frac{g}{l}\ sen\theta = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Aproximación de ángulo pequeño, $sen\theta \approx \theta$ (ver ejercicio a continuación)

$$-\frac{g}{l}\ \theta = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Llamando $\omega^2 = g/l$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta}$$

Note que esta ecuación diferencia es similar a la obtenida para el sistema masa-resorte sin rozamiento estudiado antes:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x.$$

La solución para el sistema masa-resorte era:

$$x(t) = A\ cos(\omega t + \phi)$$

Por analogía, la solución para el péndulo simple es de la forma:

$$\boxed{\theta(t) = \theta_m\ cos(\omega t + \phi)}$$

¡Gracias por su atención! ☺

Apéndice

Algunas identidades útiles.

$$cos(x) = \; sen(x + \pi/2) \qquad sen(-x) = -\, sen(x)$$

$$sen(x) = \; cos(x - \pi/2) \qquad cos(-x) = cos(x)$$